Homologietheorie der Koinzidenzpunkte

I N A U G U R A L - D I S S E R T A T I O N
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Kennziffer D 30

vorgelegt von
Ingeborg Nickelsen

Frankfurt am Main 1954

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Zusammenfassung:

$\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ seien zwei topologische Komplexe, f und g zw stetige Abbildungen von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$. Ein Punkt p aus $\mathfrak{M}$ mi $f(p) = g(p)$ heißt Koinzidenzpunkt von f und g. Ist speziell $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ und g die identische Selbstabbildung I von $\mathfrak{M}$, so sind die Koinzidenzpunkte von f und I Fixp te der Abbildung f.

Die stetigen Abbildungen f und g induzieren Homomorph men F_k und G_k der k-dimensionalen rationalzahligen Ho logiegruppen $\mathfrak{H}_k(\mathfrak{M})$ in die entsprechenden Gruppen $\mathfrak{H}_k(\mathfrak{N})$, (k = 0, 1, ..., n). Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ endliche orie tierbare kombinatorische Mannigfaltigkeiten gleicher mension, so werden durch f und g außerdem randtreue U kehrabbildungen Φ_k und Γ_k von $\mathfrak{H}_k(\mathfrak{N})$ in $\mathfrak{H}_k(\mathfrak{M})$ bestimm $\Gamma_k F_k$ stellt dann einen Endomorphismus der $\mathfrak{H}_k(\mathfrak{M})$ dar schreibt man diese Endomorphismen durch Matrizen, dan treten neben den durch f und g bestimmten Matrizen di Eigenschnittzahlmatrizen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ auf. Die Spurenw selsumme

$$\Lambda_{fg} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, Sp \, \Gamma_k F_k$$

ist den Abbildungen f und g homologieinvariant zugeor Verschwindet sie nicht, so haben f und g mindestens e Koinzidenzpunkt.

Zur kettenmäßigen Darstellung von Λ_{fg} müssen außer de simplizialen Zerlegungen M und N von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ auch di dualen Zerlegungen $\bar{M}$ und $\bar{N}$ herangezogen werden. Es we den für alle Dimensionen randtreue Kettenhomomorphism ϑ von N in $\bar{N}$ und $\bar{\eta}$ von $\bar{M}$ in M konstruiert, die die i tischen Automorphismen der Homologiegruppen induziere Bezeichnen nun Γ_k und F_k durch f und g induzierte Ab dungen der k-ten Kettengruppen, dann ist $R_k = \bar{\eta}_k \Gamma_k \vartheta_k F_k$ ein Endomorphismus der k-ten Kettengruppe von M, und es gilt:

$$\Lambda_{fg} = \sum_{k} (-1)^k \, Sp R_k = \sum_{k} (-1)^k \, Sp \, \bar{\eta}_k \Gamma_k \vartheta_k F_k$$

Setzt man nun $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ als mengentopologische Mannigfaltigkeiten voraus, so läßt sich ein Index eines isolierten Koinzidenzpunktes erklären. Er wird durch das Verhalten eines durch f und g bestimmten Vektorfeldes definiert und ist eine sinngemäße Verallgemeinerung des üblichen Fixpunktindexes. Als Koinzidenzindex von f und g wird die Summe der Indizes sämtlicher Koinzidenzpunkte bezeichnet. Haben f und g beliebige Koinzidenzpunktmengen, so wird der Index durch hinreichend gute Approximationen mit nur isolierten Koinzidenzpunkten erklärt. Solche Approximationen sind stets möglich. Darüber hinaus lassen sich f und g durch ε-Approximationen f' und g' ersetzen, die nur isolierte Koinzidenzpunkte vom Index ± 1 haben und in gewissen Umgebungen dieser Koinzidenzpunkte affin sind. Dabei bleibt die Indexsumme invariant. Unter Benutzung der f' und g' darstellenden Mengen im Produktkomplex und ihrer Schnitte folgt: $(-1)^n \Lambda_{fg}$ gibt den Koinzidenzindex von (f', g') also auch den Koinzidenzindex von (f, g) an. $(-1)^n \Lambda_{fg}$ ist zugleich die Schnittzahl der f und g darstellenden Untermengen im Produkt. Damit ist der Anschluß an frühere Untersuchungen von Lefschetz über Koinzidenzpunkte gewonnen.

Spezielle Folgerungen:

(1) Der Fixpunktindex einer Selbstabbildung f von $\mathfrak{M}$ ist gleich dem Koinzidenzindex der Abbildung f und der Identität.

(2) f und g mögen die Grade γ' und γ' haben. Die Bettizahlen von $\mathfrak{N}$ seien die der n-Sphäre. Dann ist der Koinzidenzindex von (f, g) gleich $(-1)^n \gamma' + \gamma$.

(3) Der Koinzidenzindex einer konstanten Abbildung und einer Abbildung vom Grade γ ist γ.

(4) Der Koinzidenzindex einer Abbildung g vom Grade γ mit sich selbst oder mit einer zu g homotopen Abbildung ist $(-1)^n \gamma \chi(N)$. Dabei ist $\chi(N)$ die Eulersche Charakteristik von $\mathfrak{N}$.

Lebenslauf:

Am 19.1.1928 wurde ich, Ingeborg Nickelsen, als Tochter von Alois B e s s l e r und Maria, geb. Dittert, in Fulda geboren. Dort besuchte ich von 1934 bis 1938 die Volksschule, anschließend bis April 1945 die Städtische Oberschule für Mädchen und von Oktober 1945 bis März 1947 das Realgymnasium am Institut der Engl. Fräulein. Seit dem Sommersemester 1948 studiere ich an der hiesigen Universität Mathematik und Physik. Im Juli 1950 legte ich die Diplomvorprüfung, im Mai 1952 die Diplomhauptprüfung für Mathematiker ab.

1. Referent: Prof. Dr. W. Franz

2. Referent: Prof. Dr. R. Moufang

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juli 1954

54/191 X1